

Mathematische Grundlagen der Informatik 1
WiSe 2016/17

Übungsblatt 7: Matrizen und Lineare Algebra III, Graphentheorie II

Matrizen und Lineare Algebra III

Aufgabe 7-1

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der reellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Falls die Antwort “ja” ist, dann geben Sie die Matrix der entsprechenden Transformation an.

Aufgabe 7-2

a) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ positive Zahlen. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j^{-2} \right) \geq n^2.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Auf den Raum \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt angewandt, erhält man:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

b) Zeigen Sie, dass jedes Orthogonalsystem (also auch jedes Orthonormalsystem) linear unabhängig ist.

Aufgabe 7-3

Bestimmung der Basistransformationsmatrix:

Es seien die Basen $B : b_1 = (1 \ 2)^T$ und $b_2 = (2 \ 1)^T$ und $A : a_1 = (1 \ 2)^T, a_2 = (2 \ 7)^T$ gegeben. Beschreiben Sie die Transformationsmatrix T von der Basis B an die Basis A .

Aufgabe 7-4

1. Berechnen Sie die Transformationsmatrix, die eine Szene im dreidimensionalen Raum zuerst um 30 Grad die z-Achse dreht und anschließend in x -Richtung um den Faktor 1.2 und in y -Richtung um den Faktor 0.74 skaliert. Geben Sie die ausmultiplizierte Transformationsmatrix explizit an.

2. Berechnen Sie die Transformationsmatrix, um eine Szene im zweidimensionalen Raum um den Punkt $(3.5, -7.2, 0)$ um den Winkel α zu drehen. Es genügt dabei, die Konkatenation der einzelnen Transformationsmatrizen anzugeben. Ein Ausmultiplizieren der gesamten Transformationsmatrix ist nicht erforderlich. Verwenden Sie homogene Koordinaten.

Graphentheorie II

Aufgabe 7-5

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, $x_1 = (a_1, b_1)$ und $x_2 = (a_2, b_2)$. Sei $R_< \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ eine strikte Ordnungsrelation, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} a_1 < a_2 &\Rightarrow x_1 < x_2 \\ a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2 &\Rightarrow x_1 < x_2 \\ &x_1 \not< x_2 \text{ anderenfalls} \end{aligned}$$

Wir haben die folgenden Schlüssel:

$$S = ((0, 0), (1, 8), (-4, 1), (1, -3), (4, 3), (0, 1), (1, 4))$$

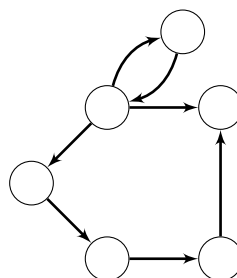
- Was ist der binäre Suchbaum nach $R_<$, nachdem man die Schlüssel mit dieser Reihenfolge eingetragen hat?
- Was ist der entsprechende höhenbalancierte binäre Suchbaum?

Aufgabe 7-6

Die Inzidenzmatrix $B \in \mathbb{R}^{|V| \times |K|}$ eines gerichteten Graphen mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge K ist wie folgt definiert:

$$b_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{wenn von Knoten } i \text{ die Kante } k \text{ ausgeht.} \\ -1 & \text{wenn die Kante } k \text{ in den Knoten } i \text{ einmündet.} \\ 0 & \text{wenn Knoten } i \text{ und Kante } k \text{ nicht inzident sind.} \end{cases}$$

Was ist die Inzidenzmatrix B des folgenden Graphen?



Aufgabe 7-7

Gegeben ist der ungerichtete Graph G :

$$G(V, E)$$

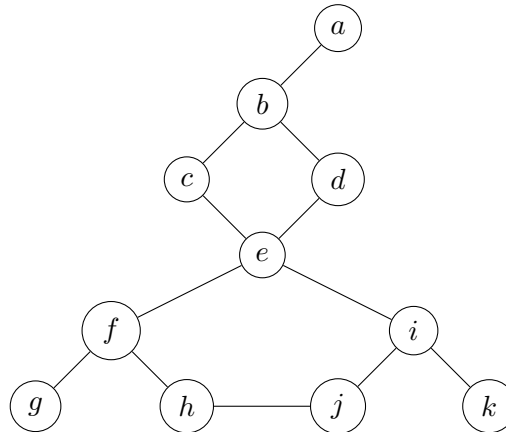
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}$$

Zeigen Sie mittels der Summe von Potenzen der Adjazenzmatrix, dass G nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 7-8

Gegeben ist folgender ungerichteter Graph:



- Schreiben Sie eine Reihenfolge, in der die Knoten besucht werden, wenn wir Breitensuche anwenden und im Knoten c anfangen.
- Schreiben Sie eine Reihenfolge, in der die Knoten besucht werden, wenn wir Tiefensuche anwenden und im Knoten c anfangen.

Aufgabe 7-9 Huffman Kodierung

Gegeben ist die Zeichenfolge S : "we_see_trees".

- Wir verwenden drei bits pro Zeichen für die Kodierung:

w	:	000
e	:	001
s	:	010
t	:	011
r	:	100
_	:	101

Wie viele Bits braucht man, um die Zeichenfolge S darzustellen?

- Bauen Sie den binären Baum des Huffman-Algorithmus. Berechnen Sie die Häufigkeit jedes Buchstabens aus der Häufigkeit seines Auftretens in der Zeichenfolge S .
- Was ist die mit dem Baum kodierte Darstellung der Zeichenfolge? Wie viele Bits braucht man jetzt?