

Mathematik für Informatiker
WiSe 2016/17

Übungsblatt 2: Gruppen, Permutationen, Restklassen und Ringe, Hashing

Gruppen

Aufgabe 2-1

Es sei $\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, \dots\}$. Geben Sie an, welche der folgenden Mengen Gruppen sind. Geben Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, mindestens eine Gruppeneigenschaft, die verletzt ist. Zeigen Sie bei den Gruppen, dass die übrigen drei Eigenschaften gelten.

- (a) $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition von ganzen Zahlen bezeichnet.
- (b) (\mathbb{Z}^+, \cdot) , wobei \cdot die gewöhnliche Multiplikation von ganzen Zahlen bezeichnet.
- (c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ mit $a * b = a/b$, wobei $/$ die gewöhnliche Division von rationalen Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q} \setminus \{0\} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$.
- (d) $(n\mathbb{Q}, +)$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$, wobei $n\mathbb{Q} := \{nq \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe 2-2

Es sei (G, \cdot) eine Gruppe, $a \in G$ und $f : G \rightarrow G$ mit $x \mapsto a \cdot x$.

- (a) Bestimmen Sie ob f injektiv oder surjektiv ist (oder beides).
- (b) Wenn f bijektiv wäre, was wäre f^{-1} ?

Aufgabe 2-3

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Kürzungsregeln:

- (a) Für alle $x, a, b \in G$ gilt $x * a = x * b$ wenn und nur wenn $a = b$.
- (b) Für alle $x, a, b \in G$ gilt $a * x = b * x$ wenn und nur wenn $a = b$.

Permutationen

Aufgabe 2-4

Zeigen Sie, dass die Menge aller Permutationen von n Elementen S_n mit der Verknüpfung \circ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2-5

Es sei σ_n eine Permutation, wobei

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Jedes Paar $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i < j$, für das $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt, nennen wir einen *Fehlstand* oder auch eine *Inversion* von σ . Zum Beispiel wären für die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

genau die Paare $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$ die Fehlstände von σ .

- (a) Bestimmen Sie alle Fehlstände von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (b) Bestimmen Sie die Fehlstände aller Elemente von S_3 , wobei S_n die Menge der Permutationen ist, die sich auf n Elemente auswirken.

Restklassen und Ringe

Aufgabe 2-6

Zeigen Sie, dass in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ das Distributivgesetz gilt. Ist $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ ein Ring?

Aufgabe 2-7

Verwenden Sie den Ring der Restklassen bei der Lösung der folgende Aufgabe.

Zeigen Sie, dass die Zahl $3^p + 4^q - 7^r$ durch 6 teilbar ist für alle $p, q, r \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2-8

- (a) Bestimmen Sie ob $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ ein Ring ist, wobei $\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, \dots\}$.
- (b) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der kein Körper ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ mit $(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ und $(a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) := (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$ ein kommutativer Ring ist.

Hashing

Aufgabe 2-9

Man kann verschiedenste Dinge hashen. Nehmen wir zum Beispiel eine Telefonnummer 065073580243. Wir haben weiters die Hashfunktion $h(x) = x \bmod 5$ (Lineares Sondieren).

Um x zu ermitteln, müssen wir nun die Telefonnummer in gleiche Teile bestehend aus zwei Nummern einteilen. In diesem Beispiel würde das folgendermaßen aussehen:

$$x = 06 + 50 + 73 + 58 + 02 + 43 = 232$$

Es folgt:

$$h(232) = 232 \bmod 5 = 2$$

Wir arbeiten weiter mit der Hashfunktion $h(x) = x \bmod 5$. Hashen Sie nun bitte die folgenden Telefonnummern analog zu dem bereits bearbeiteten Beispiel.

- (a) Berechnen Sie die Hashfunktion für Werten 0676 96578934, 0680 95434321, 0664 23167548.
- (b) Berechnen Sie die Hashfunktion mit linearen Sondieren für 0676 96578934, 0680 95434321, 0664 23167548 unter der Annahme, dass 0650 73580243 schon gehashed wurde.
- (c) Was ist der Hauptnachteil von linearen Sondieren?

Aufgabe 2-10 (Quadratisches Sondieren)

Es sei $t(i, j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \bmod m$. Die Sondierungsfolge ist wie folgt definiert:

$$j, j + 1^2, j - 1^2, j + 2^2, j - 2^2, \dots, j + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2, j - \left(\frac{m-1}{2}\right)^2.$$

- (a) Schreiben Sie eine Sondierungsfolge für $m = 19$ und $j = 7$.
- (b) Wann würde ein quadratisches sondieren gut funktionieren? Funktioniert das im Beispiel gegebenes quadratisches Sondieren gut?